

# Guia docent

## 200121 - TOP - Topologia

Última modificació: 11/04/2024

**Unitat responsable:** Facultat de Matemàtiques i Estadística  
**Unitat que imparteix:** 749 - MAT - Departament de Matemàtiques.  
**Titulació:** GRAU EN MATEMÀTIQUES (Pla 2009). (Assignatura obligatòria).  
**Curs:** 2024      **Crèdits ECTS:** 7.5      **Idiomes:** Català

### PROFESSORAT

---

**Professorat responsable:** ENRIC VENTURA CAPELL

**Altres:** Segon quadrimestre:  
MARTA CASANELLAS RIUS - M-A, M-B  
JOSEP ELGUETA MONTO - M-A, M-B  
LLUIS VENA CROS - M-A, M-B  
ENRIC VENTURA CAPELL - M-A, M-B

### CAPACITATS PRÈVIES

---

Càlcul en una variable  
Càlcul diferencial  
Àlgebra lineal  
Geometria afí i euclidiana  
Fonaments de la matemàtica

### COMPETÈNCIES DE LA TITULACIÓ A LES QUALS CONTRIBUEIX L'ASSIGNATURA

---

**Específiques:**

1. CE-2. Resoldre problemes de Matemàtiques, mitjançant habilitats de càlcul bàsic i d'altres, tot planificant-ne la resolució en funció de les eines de què es disposi i de les restriccions de temps i recursos.
2. CE-3. Utilitzar aplicacions informàtiques d'anàlisi estadístic, càlcul numèric i simbòlic, visualització gràfica, optimització o d'altres, per a experimentar en Matemàtiques i resoldre problemes.
3. CE-4. Desenvolupar programes informàtics que resolguin problemes matemàtics, tot fent servir per a cada cas l'entorn computacional escaient.

#### Genèriques:

4. CB-1. Demostrar posseir i comprendre coneixements de l'àrea de les Matemàtiques, construïts a partir de la base de l'educació secundària general i a un nivell que, tot recolzant-se en llibres de text avançats, inclogui també alguns aspectes que impliquin coneixements provinents de l'avantguarda de l'estudi de les Matemàtiques i de les seves aplicacions a la ciència i a la tecnologia.
5. CB-2. Saber aplicar d'una forma professional els coneixements matemàtics al seu treball i posseir les capacitats que, a l'àrea de les Matemàtiques i en les seves aplicacions a la ciència i a la tecnologia, s'acostumen a demostrar mitjançant l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes.
6. CB-3. Tenir la capacitat de reunir i interpretar dades rellevants, a l'àrea de les Matemàtiques i en les seves aplicacions, per a emetre judicis que incloguin una reflexió sobre temes rellevants d'índole social, científica o ètica.
7. CG-1. Comprendre i emprar el llenguatge matemàtic. Adquirir la capacitat d'enunciar propietats en diversos camps de la Matemàtica, de construir argumentacions, d'elaborar càlculs i de transmetre els coneixements matemàtics adquirits.
8. CG-2. Conèixer demostracions rigoroses d'alguns teoremes clàssics en diferents àrees de la Matemàtica.
9. CG-3. Assimilar la definició d'un nou objecte matemàtic en termes d'altres ja coneguts i ser capaç de fer servir aquest objecte en contextos diferents.
10. CG-4. Saber abstraure les propietats estructurals (dels objectes matemàtics, de la realitat observada i d'altres àmbits), distingint-les de les que només són ocasionals. Poder comprovar-les amb demostracions o refutar-les mitjançant contraexemples, així com identificar errors en els raonaments incorrectes.
12. CG-6. Detectar deficiències en el propi coneixement i superar-les mitjançant la reflexió crítica i l'elecció de la millor actuació per a ampliar aquest coneixement.

#### Transversals:

11. APRENTATGE AUTÒNOM: Detectar mancances en el propi coneixement i superar-les mitjançant la reflexió crítica i l'elecció de la millor actuació per ampliar aquest coneixement.

## METODOLOGIES DOCENTS

---

Teoria. Classes magistrals en les quals es desenvolupa tot el cos de l'assignatura. Donat que, a més d'informativa (vocabulari topològic) és una assignatura formativa, es demostren la major part dels resultats. Procurem introduir cada tema amb alguna motivació que faci referència a coneixements previs de l'estudiant, o bé a problemes de la pròpia matèria. Resultats i definicions són il·lustrats amb exemples, contra-exemples i exercicis senzills.

Les classes de problemes pretenen que l'estudiant practiqui i desenvolupi els resultats explicats a classe de teoria.

## OBJECTIUS D'APRENTATGE DE L'ASSIGNATURA

---

- \* Comprendre el concepte d'espai topològic. Ús dels conceptes de base, subbase i entorn. Saber comparar topologies.
- \* Comprendre els conceptes de connexió i compacitat en espais topològics. Capacitat de comprovar aquestes propietats en exemples concrets.
- \* Comprendre el concepte d'homeomorfisme. Capacitat per definir-ne i construir-ne en exemples senzills. Capacitat per argumentar quan dos espais topològics no poden ser homeomorfs.
- \* Capacitar per a la utilització de topologies induïdes, producte i quocient. Especialment, identificació d'espais quocients via homeomorfismes i propietats universals i capacitat de treball amb aplicacions definides en espais quocient.
- \* Entendre les caracteritzacions alternatives dels conceptes topològics en els espais mètrics.
- \* Entendre els conceptes bàsics d'homotopia entre aplicacions contínues i la construcció del conjunt de classes d'homotopia  $[X, Y]$ . Entendre el concepte de tipus d'homotopia d'espais topològics. Saber identificar retractes de deformació senzills.
- \* Entendre l'estructura de grup abelià de  $H^1(X) = [X, S^1]$  i els morfismes induïts per aplicacions contínues. Càlcul quan  $X$  és contràctil o la circumferència. Entendre el concepte d'elevació de camins i homotopies i de grau.
- \* Comprendre el concepte d'índex d'una corba tancada del pla respecte al punt i la seva relació amb els conceptes de grau i d'homotopia. Saber-lo calcular.
- \* Entendre com el concepte d'índex permet demostrar els teoremes bàsics de la topologia del pla i l'esfera: Brouwer, Borsuk-Ulam, invariància de la dimensió... Capacitat d'aplicar-los a diferents situacions.
- \* Saber classificar una superfície compacta a partir de la seva superfície poligonal.

## HORES TOTALS DE DEDICACIÓ DE L'ESTUDIANTAT

Tipus	Hores	Percentatge
Hores grup gran	45,0	24.00
Hores aprenentatge autònom	112,5	60.00
Hores grup petit	30,0	16.00

**Dedicació total:** 187.5 h

## CONTINGUTS

### Espais mètrics

**Descripció:**

Boles obertes i tancades. Conjunts oberts. Aplicacions contínues. Distàncies equivalents.

**Dedicació:** 10h

Grup gran/Teoria: 3h

Grup mitjà/Pràctiques: 2h

Aprenentatge autònom: 5h

### Espais topològics

**Descripció:**

Oberts i tancats. Bases, subbases, entorns. Aplicacions contínues, homeomorfismes. El primer axioma de numerabilitat: caracterització de propietats topològiques mitjançant límit de successions. Espais de Hausdorff.

**Dedicació:** 24h

Grup gran/Teoria: 7h

Grup mitjà/Pràctiques: 5h

Aprenentatge autònom: 12h

### Construcció d'espais topològics

**Descripció:**

Subespais. Productes d'espais topològics. Espais quocient. Exemples: superfícies topològiques.

**Dedicació:** 24h

Grup gran/Teoria: 7h

Grup mitjà/Pràctiques: 5h

Aprenentatge autònom: 12h

### Compacitat

**Descripció:**

Espais compactes. Continuïtat i compacitat. Teorema del valor màxim. Productes i quocients d'espais compactes. Compacitat en espais mètrics: lema del nombre de Lebesgue.

**Dedicació:** 14h

Grup gran/Teoria: 4h

Grup mitjà/Pràctiques: 3h

Aprenentatge autònom: 7h



### Connexió

**Descripció:**

Espais connexos. Components connexos. Continuitat i connexió. Teorema del valor intermedi. Espais arccnexusos. Components arccnexusos.

**Dedicació:** 14h

Grup gran/Teoria: 4h

Grup mitjà/Pràctiques: 3h

Aprenentatge autònom: 7h

### Introducció a l'homotopia

**Descripció:**

Homotopia d'aplicacions contínues. Espais contràctils. Retractes de deformació. El conjunt de les classes d'homotopia  $[X, Y]$ . El grup abelià  $[S^1, S^1]$ : grau d'una aplicació, lema d'aixecament de camins i homotopies.

**Dedicació:** 20h

Grup gran/Teoria: 6h

Grup mitjà/Pràctiques: 4h

Aprenentatge autònom: 10h

### Aplicacions a la topologia del pla

**Descripció:**

Índex d'una corba tancada. Teoremes de Poincaré-Böhl i Rouché. Teorema del punt fix de Brouwer. El teorema fonamental de l'àlgebra. El teorema de Borsuk-Ulam. Invariància de la dimensió.

**Dedicació:** 22h

Grup gran/Teoria: 7h

Grup mitjà/Pràctiques: 4h

Aprenentatge autònom: 11h

### Classificació de superfícies compactes

**Descripció:**

Triangulació de superfícies compactes. Superfícies poligonals. Superfícies estàndards. Suma connexa de superfícies. Teorema de classificació. Orientació, gènere i característica d'Euler.

**Dedicació:** 22h

Grup gran/Teoria: 7h

Grup mitjà/Pràctiques: 4h

Aprenentatge autònom: 11h

## SISTEMA DE QUALIFICACIÓ

Examen parcial no eliminatori de matèria i examen final.

La nota de l'assignatura serà el màxim entre la nota de l'examen final i la suma ponderada de les notes del parcial i del final amb pesos del 30% i 70%, respectivament.

Adicionalment, hi haurà un examen extraordinari al juliol per als estudiants suspesos.



## BIBLIOGRAFIA

---

### Bàsica:

- Kosniowski, Czes. Topología algebraica. Barcelona: Reverté, 1992. ISBN 9788429150988.
- Munkres, James R. Topología. 2a ed. Madrid: Prentice-Hall, 2002. ISBN 8420531804.
- Pascual Gainza, P.; Roig, A. Topologia [en línia]. Barcelona: Edicions UPC, 2004 [Consulta: 21/05/2020]. Disponible a: <http://hdl.handle.net/2099.3/36790>. ISBN 8483017504.
- Sieradski, A. An introduction to topology and homotopy. Boston: PWS-KENT, 1992. ISBN 0534929605.
- Viro, O. Ya [et al.]. Elementary topology : problem textbook [en línia]. Providence: American Mathematical Society, 2008 [Consulta: 27/06/2023]. Disponible a: <https://ebookcentral-proquest-com.recursos.biblioteca.upc.edu/lib/upcatalunya-ebooks/detail.action?pq-origsite=primo&docID=4715680>. ISBN 9780821845066.

### Complementària:

- Jänich, Klaus. Topology. New York: Springer-Verlag, 1984. ISBN 0387908927.
- Massey, William S. A basic course in algebraic topology. New York: Springer-Verlag, 1991. ISBN 038797430X.
- Navarro Aznar, V.; Pascual Gainza, P. Topologia algebraica. Barcelona: Edicions UB, 1999. ISBN 8483381230.
- Wall, C.T.C. A geometric introduction to topology. New York: Dover, 1993. ISBN 0486678504.