Guia docent
200122 - GD - Geometria Diferencial

Última modificació: 29/05/2025

Unitat responsable: Facultat de Matemàtiques i Estadística
Unitat que imparteix: 749 - MAT - Departament de Matemàtiques.

Titulació: GRAU EN MATEMÀTIQUES (Pla 2009). (Assignatura obligatòria).

Curs: 2025 **Crèdits ECTS:** 7.5 **Idiomes:** Català

PROFESSORAT

Professorat responsable: FRANCESC XAVIER GRACIA SABATE

Altres: Segon quadrimestre:
JOSE BURILLO PUIG - B
FRANCESC XAVIER GRACIA SABATE - A, B
PEDRO TALAVERA SANCHEZ - A

CAPACITATS PRÈVIES

Coneixements de Càlcul Diferencial i Integral en diverses variables.

Coneixements d'Àlgebra i Geometria Lineals. Coneixements bàsics de Topologia.

És recomanable un coneixement d'equacions diferencials ordinàries, perquè són necessàries en algun punt del curs.

COMPETÈNCIES DE LA TITULACIÓ A LES QUALS CONTRIBUEIX L'ASSIGNATURA

Específiques:
1. CE-2. Resoldre problemes de Matemàtiques, mitjançant habilitats de càlcul bàsic i d'altres, tot planificant-ne la resolució en funció de les eines de què es disposi i de les restriccions de temps i recursos.
2. CE-3. Utilitzar aplicacions informàtiques d'anàlisi estadístic, càlcul numèric i simbòlic, visualització gràfica, optimització o d'altres, per a experimentar en Matemàtiques i resoldre problemes.
3. CE-4. Desenvolupar programes informàtics que resolguin problemes matemàtics, tot fent servir per a cada cas l'entorn computacional escaient.

Genèriques:
5. CB-1. Demostrar posseir i comprendre coneixements de l'àrea de les Matemàtiques, construïts a partir de la base de l'educació secundària general i a un nivell que, tot recolzant-se en llibres de text avançats, inclogui també alguns aspectes que impliquin coneixements provinents de l'avantguarda de l'estudi de les Matemàtiques i de les seves aplicacions a la ciència i a la tecnologia.
6. CB-2. Saber aplicar d'una forma professional els coneixements matemàtics al seu treball i posseir les capacitats que, a l'àrea de les Matemàtiques i en les seves aplicacions a la ciència i a la tecnologia, s'acostumen a demostrar mitjançant l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes.
7. CB-3. Tenir la capacitat de reunir i interpretar dades rellevants, a l'àrea de les Matemàtiques i en les seves aplicacions, per a emetre judicis que incloguin una reflexió sobre temes rellevants d'índole social, científica o ètica.
8. CG-1. Comprendre i emprar el llenguatge matemàtic. Adquirir la capacitat d'enunciar propietats en diversos camps de la Matemàtica, de construir argumentacions, d'elaborar càlculs i de transmetre els coneixements matemàtics adquirits.
9. CG-2. Conèixer demostracions rigoroses d'alguns teoremes clàssics en diferents àrees de la Matemàtica.
10. CG-3. Assimilar la definició d'un nou objecte matemàtic en termes d'altres ja coneguts i ser capaç de fer servir aquest objecte en contextos diferents.
11. CG-4. Saber abstreure les propietats estructurals (dels objectes matemàtics, de la realitat
observada i d'altres àmbits), distingint-les de les que només són ocasionals. Poder comprovar-les amb demostracions o refutar-les mitjançant contraexemples, així com identificar errors en els raonaments incorrectes.
12. CG-6. Detectar deficiències en el propi coneixement i superar-les mitjançant la reflexió
crítica i l'elecció de la millor actuació per a ampliar aquest coneixement.

Transversals:
4. APRENENTATGE AUTÒNOM: Detectar mancances en el propi coneixement i superar-les mitjançant la reflexió crítica i l'elecció de la millor actuació per ampliar aquest coneixement.

METODOLOGIES DOCENTS

Les classes es distribuiran en sessions de teoria, sessions de problemes. A les classes de teoria s'exposaran els conceptes i resultats fonamentals de la matèria. Les sessions de problemes estaran destinades al coneixement de diversos exemples i aplicacions dels resultats fonamentals, així com a desenvolupar els hàbits de càlcul associats.

OBJECTIUS D'APRENENTATGE DE L'ASSIGNATURA

Aquesta assignatura dóna una primera introducció als mètodes i resultats de la Geometria Diferencial, centrant-se al voltant de l'estudi de les corbes i les superfícies de l'espai ordinari. Més específicament, es presenten els objectius següents:

- Corbes: conèixer la curvatura i la torsió d'una corba a l'espai, així com les equacions fonamentals del triedre de Frenet.

- Superfícies: hi ha diversos nivells. En primer lloc entendre les superfícies com exemple de varietat diferencial, mitjançant les cartes locals i els canvis de coordenades. El segon objectiu se centra al voltant de la primera forma fonamental i, en última instància, en la noció de varietat riemanniana. Finalment es presenten la curvatura de Gauss i el teorema egregi i, a partir d'aquest, s'elabora la geometria intrínseca de la superfície. En aquest punt volem destacar la connexió a les geometries no euclidianes.

- S'oferirà també una breu introducció a les varietats de dimensió superior.

HORES TOTALS DE DEDICACIÓ DE L'ESTUDIANTAT

Tipus	Hores	Percentatge
Hores aprenentatge autònom	112,5	51.72
Hores grup mitjà	30,0	13.79
Hores grup gran	45,0	20.69
Hores grup petit	30,0	13.79

Dedicació total: 217.5 h

CONTINGUTS

1. Corbes al pla i l'espai

Descripció:
Corbes parametritzades. Recta tangent. Exemples. Corbes regulars, longitud d'arc. Curvatura, vector normal, vector binormal, torsió, triedre i fórmules de Frenet. Teorema fonamental de la teoria de corbes.

Dedicació: 37h 30m
Grup gran/Teoria: 9h
Grup petit/Laboratori: 6h
Aprenentatge autònom: 22h 30m

2. Superfícies

Descripció:
Superfícies regulars, parametritzacions. Funcions diferenciables sobre superfícies, punts crítics. Pla tangent, recta normal. Diferencial d'una aplicació, difeomorfismes. Geometria en el pla tangent: primera forma fonamental. Geometria en la superfície: mesura de longituds, angles i àrees.

Dedicació: 37h 30m
Grup gran/Teoria: 9h
Grup petit/Laboratori: 6h
Aprenentatge autònom: 22h 30m

3. Curvatura de Gauss

Descripció:
L'aplicació de Gauss. La diferencial de l'aplicació de Gauss i la segona forma fonamental. Curvatura normal: Teorema de Meusnier. Curvatures principals, línies de curvatura: teoremes de Rodrigues i d'Euler. Curvatures de Gauss i mitjana. Classificació dels punts d'una superfície. Direccions i corbes asimptòtiques. Indicatriu de Dupin.

Dedicació: 37h 30m
Grup gran/Teoria: 9h
Grup petit/Laboratori: 6h
Aprenentatge autònom: 22h 30m

4. Exemples de superfícies

Descripció:
Fórmules bàsiques per al càlcul de la segona forma fonamental: equacions de Weingarten. Superfícies planes. Superfícies reglades. Quàdriques. Superfícies de revolució. Superfícies mínimes.

Dedicació: 12h 30m
Grup gran/Teoria: 3h
Grup petit/Laboratori: 2h
Aprenentatge autònom: 7h 30m

5. Equacions fonamentals de les superfícies

Descripció:
Isometries, isometries locals. Símbols de Christoffel. Fórmula de Gauss i Teorema Egregi. Equacions de compatibilitat de Codazzi-Mainardi. Teorema de Bonnet.

Dedicació: 25h
Grup gran/Teoria: 6h
Grup petit/Laboratori: 4h
Aprenentatge autònom: 15h

6. Geometria sobre les superfícies

Descripció:
Derivada covariant, transport paral·lel. Curvatura geodèsica, geodèsiques, fórmula de Liouville. Aplicació exponencial, propietat minimal de les geodèsiques. Fórmula de l'excés/defecte per a la suma dels angles d'un triangle. El Teorema de Gauss-Bonnet i aplicacions.

Dedicació: 22h 30m
Grup gran/Teoria: 5h
Grup petit/Laboratori: 4h
Aprenentatge autònom: 13h 30m

7. Introducció a les varietats diferencials

Descripció:
Varietats diferencials, funcions diferenciables. Espai tangent, diferencial d'una funció. Valors regulars i subvarietats. Exemples.

Dedicació: 15h
Grup gran/Teoria: 4h
Grup petit/Laboratori: 2h
Aprenentatge autònom: 9h

SISTEMA DE QUALIFICACIÓ

La qualificació de l'assignatura s'obtindrà a partir de:

EP : Examen Parcial
PP: Pràctica de Programació
EF : Examen Final

segons la ponderació següent:

Nota Final = màx(0.1 PP + 0.9 EF, 0.3 EP + 0.1 PP + 0.6 EF).

Addicionalment, hi haurà un examen extraordinari al juliol per als estudiants suspesos.

NORMES PER A LA REALITZACIÓ DE LES PROVES.

Els examens (EF i EP) contindran preguntes teòriques i pràctiques.

Només es permetrà portar un formulari.

BIBLIOGRAFIA

Bàsica:
- Pascual Gainza, Pere. Geometria diferencial de corbes i superfícies [en línia]. Barcelona: Iniciativa Digital Politècnica, 2017 [Consulta: 19/06/2023]. Disponible a: http://hdl.handle.net/2117/104841. ISBN 9788498806441.
- Shifrin, Theodore. Differential geometry: A First Course in curves and surfaces [en línia]. University of Georgia, 2016 [Consulta: 21/06/2023]. Disponible a: http://alpha.math.uga.edu/~shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf.

Complementària:
- Carmo, Manfredo Perdigão do. Differential geometry of curves and surfaces. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1976. ISBN 0132125897.
- Hitchin, Nigel. Geometry of surfaces [en línia]. 2013. University of Oxford, [Consulta: 19/06/2023]. Disponible a: https://www.e-booksdirectory.com/details.php?ebook=256.
- Bär, Christian. Elementary differential geometry [en línia]. Cambridge University Press, 2010 [Consulta: 19/06/2023]. Disponible a: https://ebookcentral-proquest-com.recursos.biblioteca.upc.edu/lib/upcatalunya-ebooks/detail.action?pq-origsite=primo&docID=803056. ISBN 9780521721493.
- Palais, Richard S. A Modern course on curves and surfaces [en línia]. Apunts, Brandeis University, 2003 [Consulta: 19/06/2023]. Disponible a: https://virtualmathmuseum.org/Surface/a/bk/curves_surfaces_palais.pdf.
- Topogonov, Victor Andreevich. Differential geometry of curves and surfaces: A Concise Guide [en línia]. Birkhähuser, 2006 [Consulta: 19/06/2023]. Disponible a: https://link-springer-com.recursos.biblioteca.upc.edu/book/10.1007/b137116. ISBN 0817643842.
- Milnor, John. Morse theory. Princeton, 1969. ISBN 0691080089.

RECURSOS

Altres recursos:
*Famous Curves Applet Index http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Java/ />*3D-XplorMath, de Richard Palais: http://3d-xplormath.org/
*Wolfram mathworld curves http://mathworld.wolfram.com/topics/Curves
*National Curve bank http://curvebank.calstatela.edu/home/home.htm />*Open Geometry Gallery http://www1.uni-ak.ac.at/geom/opengeometry_gallery
*Virtual Math museum http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery_o
*Wolfram mathworld surfaces http://mathworld.wolfram.com/topics/Surfaces
*Altres galeries http://faculty.evansville.edu/ck6/GalleryTwo/Introduction2